„NIEROZWIĄZANE PROBLEMY W MATEMATYCE”

Opracowane przez:
Kinga Jamróz
Agata Jurczak
Karolina Latuszek
Krótki Kurs Historii Matematyki
Semetr zimowy 2012/2013

Warszawa, 23.01.2013.

OTWARTE PROBLEMY MATEMATYCZNE:

- **Problemy Hilberta**
- Problemy Landau
- **Problemy milenijne**
- Problemy Smale'a

PROBLEMY MILENIJNE

Millennium Prize Problems –

zestaw siedmiu zagadnień matematycznych ogłoszonych przez Instytut Matematyczny Claya 24 maja 2000 roku; za rozwiązanie każdego z nich wyznaczono milion dolarów nagrody.

CLAY MATHEMATICS INSTITUTE

- **Clay Mathematics Institute** (CMI) jest organizacją prywatną, nie nastawioną na dochód , mającą na celu rozwijanie i upowszechnianie wiedzy matematycznej. Założony został przez przedsiębiorcę z Bostonu, multimilionera Landona T. Claya, wielkiego miłośnika matematyki, który tak oto określił swoje poglądy na tę dziedzinę nauki:
- Matematyka jest kwintesencją wiedzy ludzkiej; znajduje się ona u podstaw każdego naszego działania; jej rozwój odbywa się dziś drogami niezwykle głębokich i trudnych rozumowań. A przy tym postępy matematyki są tożsame z postępem we wszelkich innych dziedzinach nauki i techniki. Jej zastosowania wspierają nasze codzienne życie, wpływają na ludzkie zdrowie i bezpieczeństwo, na całą naszą pomyślność. Rozwój matematyki nadal będzie kluczową sprawą w kształtowaniu jutra naszego świata, zaś docenienie znaczenia prawdy matematycznej pozostanie największym wyzwaniem dla ludzkiego umysłu.
- CMI organizuje i finansuje warsztaty badawcze, spotkania, kursy i konferencje matematyczne dla uczonych z całego świata. Oferuje także matematykom kontrakty na prowadzenie badań w wybranych dziedzinach. Przyznaje również doroczne nagrody; pierwszym laureatem takiej nagrody był Andrew Wiles, słynny matematyk angielski, któremu udało się dowieść głośnego Wielkiego Twierdzenia Fermata. W krótkim czasie ta nowa instytucja zdobyła sobie światową renomę, stając się jednym z ważniejszych centrów naukowych świata.

- www.claymath.org.

nr	data powstania	opis	stan
1.	1971	Problem NP	Nierozwiązany
2.	1950	Hipoteza Hodge'a	Rozwiązany dla niektórych wersji
3.	**1904**	**Hipoteza Poincarégo**	**Potwierdzona w 2003 roku przez Grigorija Perelmana**
4.	1859	Hipoteza Riemanna	Nierozwiązana
5.	1954	Teoria Yanga-Millsa	Nierozwiązana
6.	1822	Równania Naviera-Stokesa	Rozwiązany dla niektórych wersji
7.	1960	Hipoteza Bircha i Swinnertona-Dyera	Rozwiązany dla niektórych wersji

PROBLEM NP

>Problem decyzyjny.

>Czy istnieją pytania, na które odpowiedź – jeśli się ją zna – można szybko zweryfikować, lecz których rozwiązanie – bez znajomości odpowiedzi – zabierze więcej czasu (mierzonego poprzez złożoność obliczeniową)?

>Nierozwiązany. Wielokrotnie przedstawiano próby jej udowodnienia jak i obalenia, a także wykazania niedowodliwości

PROBLEM NP

- Różnica pomiędzy problemami P i NP polega na tym, że w przypadku P **znalezienie** rozwiązania ma mieć złożoność wielomianową, podczas gdy dla NP **sprawdzenie** podanego z zewnątrz rozwiązania ma mieć taką złożoność.

- Przykładowo rozważmy problem:

  Czy jakikolwiek niepusty podzbiór zadanego zbioru

  (np. {-2,6,-3,72,10,-11}) sumuje się do zera ?

  Trudno znaleźć rozwiązanie tego zagadnienia w czasie wielomianowym. Nasuwający się algorytm sprawdzenia wszystkich możliwych podzbiorów ma złożoność wykładniczą ze względu na liczebność zbioru. Nie wiadomo zatem, czy problem ten jest klasy P. Na pewno natomiast uzyskawszy z zewnątrz kandydata na rozwiązanie (np. {-2,6,-3,10,-11}) możemy w liniowym (a zatem wielomianowym) czasie sprawdzić, czy sumuje się do zera. Jest to zatem problem NP.

PROBLEM NP

W szczególności wszystkie problemy klasy P są NP, ponieważ można je sprawdzić w czasie wielomianowym.

Innymi słowy, klasa P zawiera się nieostro w NP. Nie wiadomo natomiast, czy istnieje problem NP, który nie jest w klasie P.

Jest to jedno z wielkich nierozwiązanych zagadnień informatyki.

HIPOTEZA POINCARÈGO

Hipoteza:

Każda trójwymiarowa zwarta i jednospójna rozmaitość topologiczna bez brzegu jest homeomorficzna ze sferą trójwymiarową.

HIPOTEZA POINCARÈGO

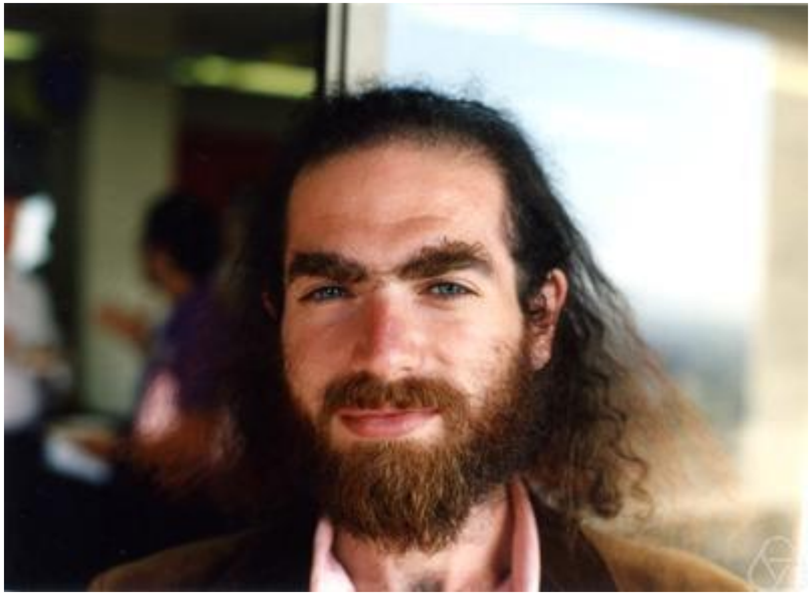
- Twierdzenie topologii, sformułowane w pracach Henriego Poincarégo w roku 1904. Przez niemal sto lat nie udawało się dowieść jego poprawności lub go obalić. Ostateczne potwierdzenie hipoteza Poincarégo uzyskała w roku 2006.

- Dowód potwierdzający prawdziwość hipotezy zawarty jest w pracach rosyjskiego matematyka Grigorija Perelmana, opublikowanych w roku 2003. Jego prace zostały zweryfikowane w roku 2006. Magazyn Science przyznał ostatecznemu rozstrzygnięciu hipotezy miano "naukowego wydarzenia roku 2006".

GRIGORIJ PERELMAN

- W grudniu 2005 porzucił stanowisko głównego pracownika naukowego laboratorium fizyki matematycznej, odszedł z Instytutu i praktycznie całkowicie przerwał kontakty z kolegami. Od tamtej pory nie wykazywał zainteresowania karierą naukową.
- Na Międzynarodowym Kongresie Matematyków, który odbywał się od 22 do 30 sierpnia 2006 w Madrycie, Perelman został jednym z laureatów medalu Fieldsa.

  Dr Perelman odmówił przyjęcia medalu.
- W marcu 2010 za udowodnienie hipotezy Poincarégo Instytut Matematyczny Claya przyznał mu jedną z siedmiu Nagród Tysiąclecia w wysokości miliona dolarów jednak Perelman odmówił jej przyjęcia w lipcu 2010.
- Obecnie mieszka wraz ze swoją matką w Sankt Petersburgu, w niewielkim mieszkaniu w bloku. Prowadzi ascetyczny tryb życia, unika kontaktów z mediami.



HIPOTEZA RIEMANNA

- Sformułowana w 1859 roku hipoteza dotycząc badanej przez niemieckiego matematyka Bernharda Riemanna funkcji dzeta.
  Jest jednym z największych nierozwiązanych problemów w matematyce.

- Mówi ona, że wszystkie tzw. nietrywialne zera (nierzeczywiste) tej funkcji mają część rzeczywistą równą ½. Problem ten ma duże znaczenie dla całej matematyki - w szczególności dla teorii liczb, ale również dla statystyki oraz fizyki.

RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

Równania Claude-Louis Naviera i George Gabriel Stokesa – zestaw równań w postaci równań ciągłości, opisujące zasadę zachowania masy i pędu dla poruszającego się płynu. Według nich zmiany pędu elementu płynu zależą jedynie od zewnętrznego ciśnienia i wewnętrznych sił lepkości w płynie. Dla płynu idealnego o zerowej lepkości równania mówią, że przyspieszenie jest proporcjonalne do pochodnej ciśnienia.

RÓWNANIA NAVIERA-STOKESA

- W bardziej złożonych przypadkach, takich jak systemy badania pogody na Ziemi, takie jak El Niño lub przy obliczeniach siły nośnej skrzydeł samolotów, rozwiązania równań Naviera-Stokesa mogą być znalezione jedynie metodami numerycznymi przy pomocy komputerów. Jest to oddzielna dziedzina nauki zwana obliczeniową mechaniką płynów.

- Ogólna forma równań Naviera-Stokes'a dla zasady zachowania pędu:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \mathbb{P} + \rho \mathbf{f}$$

gdzie:

ρ - gęstość płynu,

$\frac{D}{Dt}$ - Operator Stokesa zwany też pochodną substancjalną,

$\mathbf{v}$ - wektor prędkości,

$\mathbf{f}$ - wektor przyspieszenia płynu (sił masowych),

$\mathbb{P}$ - tensor naprężeń wewnętrznych w elemencie płynu.

HIPOTEZA HODGE'A

- Badając kształty różnych obiektów (jak powierzchnia piłki, czy dętka), matematyka rozwinęła zaawansowane techniki usiłujące stwierdzić, czy kształt obiektów wielowymiarowych można przybliżać konstrukcjami z prostych obiektów o niższej liczbie wymiarów. Uogólnienia tego typu poszły jeszcze dalej, zatracając niemal całkowicie początkowy związek z geometrią i obiektami geometrycznymi. Hipoteza Hodge'a sugeruje, iż dla niektórych specjalnych obiektów pewne konstrukcje algebraiczne są ściśle związane z określonymi tworami geometrycznymi.

HIPOTEZA BIRCHA I SWINNERTON-DYERA

- Matematyków od zawsze fascynował problem znajdowania wszystkich rozwiązań w zbiorze liczb całkowitych (czy wymiernych) dla równań algebraicznych np. typu x2 + y2 = z2. Kompletne rozwiązanie tego właśnie równania (czyli znalezienie wszystkich możliwych rozwiązań) dał Euklides, ale dla równań bardziej skomplikowanych, znalezienie wszystkich rozwiązań jest niezwykle trudne. Znane są jednak szczególne przypadki, które pozwalają matematykom nie tracić nadziei. Jednym z nich jest właśnie sytuacja opisana przez Bircha i Swinnerton-Dyera. Hipoteza przez nich sformułowana wiąże liczbę rozwiązań danego równania w zbiorze liczb wymiernych z zachowaniem pewnej funkcji. Gdy jej wartość w punkcie 1 wynosi 0, to istnieje nieskończenie wiele rozwiązań wymiernych, gdy jest różna od 0 – liczba rozwiązań jest skończona.

TEORIA YANGA-MILLSA

- Prawa fizyki kwantowej mają się tak do świata cząstek elementarnych, jak prawa klasycznej mechaniki Newtona do świata pod mikroskopem. Prawie pół wieku temu naukowcy Yang i Mills przedstawili propozycję opisania cząstek elementarnych przy użyciu struktur, które występują w geometrii. Teoria kwantowa Yanga-Millsa jest fundamentem większości teorii cząstek elementarnych. Jej możliwości rozwoju zostały przetestowane podczas wielu eksperymentów laboratoryjnych, ale jej matematyczne podwaliny nie są jasne.
- Aby nastąpił postęp w fizyce cząstek elementarnych należałoby najpierw uporządkować matematyczne podstawy teorii Yanga-Millsa.

TEORIA YANGA-MILLSA

- Teorie Yanga-Millsa, opisujące model matematyczny cząstek elementarnych i ich oddziaływań, są doskonale przetestowane i stanowią podstawę współczesnej teorii pola. Nie wszystkie jednak problemy z tej dziedziny udaje się opisać równie konsekwentnie - jak choćby fenomen "uwięzienia" kwarków (kwarków nie można zaobserwować pojedynczo, jedynie w cząstkach, które składają się z trzech kwarków lub pary kwark-antykwark). Postawiony problem dotyczy znalezienia w kwantowej teorii oddziaływań Yanga-Millsa, satysfakcjonujących z matematycznego punktu widzenia rozwiązań wyjaśniających ten fenomen.

PROBLEMY HILBERTA

- Lista 23 zagadnień matematycznych przedstawiona przez Davida Hilberta na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900r. podczas referatu pokazującego stan matematyki na przełomie XIX i XX wieku.
- Sam Hilbert prawdopodobnie nie zdawał sobie sprawy z wagi i trudności wielu spośród postawionych przez siebie problemów. Próby ich rozwiązania wpłynęły znacząco na rozwój matematyki w XX wieku.
- Obecnie większość problemów Hilberta została rozwiązana, choć niektóre problemy sformułowane są zbyt ogólnie, by można to było jednoznacznie stwierdzić.

Lista problemów Hilberta

Nr	Krótki opis	Aktualny status
1	Hipoteza continuum (nie istnieje zbiór o mocy pośredniej pomiędzy mocą zbioru liczb całkowitych i liczb rzeczywistych)	Udowodniono, że hipoteza ta jest niezależna od aksjomatyki Zermelo-Fraenkla teorii mnogości. W oparciu o te aksjomaty nie można jej ani udowodnić, ani obalić.
2	Udowodnić niesprzeczność aksjomatów arytmetyki (tzn., że arytmetyka jest systemem	Nie ma zgody co do rozstrzygnięcia, mający pomóc w rozwiązaniu problemu program

	formalnym, w którym nie jest możliwy dowód dwóch sprzecznych ze sobą twierdzeń)	Hilberta został podważony przez twierdzenie Gödla, jednak jest to wciąż przedmiotem debaty.
3	Czy mając dane dwa wielościany o równej objętości, można zawsze rozłożyć jeden z nich na skończoną liczbę wielościennych części, a następnie złożyć je w drugi?	Rozwiązany przez Maxa Dehna, który podał kontrprzykład.
4	Problem konstrukcji przestrzeni metrycznych, w których proste stanowią najkrótszą drogę pomiędzy punktami	Problem uznany za zbyt ogólnikowy, choć został rozstrzygnięty dla pewnych szczególnych przypadków.
5	Czy wszystkie ciągłe grupy są jednocześnie grupami Liego?	Rozwiązany w 1953 r. – dowodu dostarcza twierdzenie Gleasona-Montgomery'ego-Zippina.
6	Aksjomatyzacja całości fizyki	Problem został uznany za niematematyczny, rozwiązany tylko dla niektórych dziedzin.
7	Czy liczba a^b, gdzie liczba algebraiczna a jest różna od 0 i 1, a b jest algebraiczną liczbą niewymierną, jest liczbą przestępną?	Rozwiązany – odpowiedzi pozytywnej udziela twierdzenie Gelfonda.
8	Hipoteza Riemanna (część rzeczywista każdego nietrywialnego zera funkcji dzeta jest równa ½) i hipoteza Goldbacha (każda liczba parzysta większa od 2 może być wyrażona jako suma dwóch liczb pierwszych)	Problem otwarty.

9	Dowód uogólnionego prawa wzajemności dla każdego algebraicznego ciała liczbowego	Rozwiązany częściowo. W 1927 r. Emil Artin podał dowód dla rozszerzeń abelowych (twierdzenie Artina o wzajemności). Przypadek ogólny pozostaje otwarty.
10	Przewidzenie rozwiązywalności każdego równania diofantycznego	Rozwiązany – zgodnie z twierdzeniem Matijasiewicza jest to niemożliwe.
11	Rozwiązywanie form kwadratowych z dowolnymi algebraicznymi współczynnikami liczbowymi	Rozwiązany w 1924 r. przez Helmuta Hassego.
12	Rozszerzenie twierdzenia Kroneckera-Webera o ciałach abelowych na dowolne algebraiczne ciała liczbowe	Problem otwarty.
13	Rozwiązywanie wszystkich równań 7. stopnia przy użyciu funkcji dwóch zmiennych	Rozwiązany. Możliwość rozwiązania wszystkich takich równań udowodnił Władimir Arnold razem z Andriejem Kołmogorowem
14	Dowód skończoności konstrukcji pewnych podpierścieni	Rozwiązany. Odpowiedź przecząca z uwagi na kontrprzykład znaleziony w 1959 r. przez Masayoshi Nagatę.
15	Ścisłe sformułowanie rachunku Schuberta	Rozwiązany w 1930 r. przez Van der Waerdena.
16	Postulat badań nad topologią krzywych i powierzchni algebraicznych	Problem otwarty.

17	Wyrażenie określonych funkcji rzeczywistych jako ilorazu sum kwadratów	Rozwiązany. Znaleziono górne ograniczenie dla liczby wymaganych składników.
18	Czy istnieje nieforemny wielościan pozwalający na wypełnienie przestrzeni? Jakie jest najgęstsze upakowanie sfer?	Rozwiązany, ale dowód postulatu Keplera wciąż czeka na powszechną akceptację.
19	Czy rozwiązania lagranżjanów są zawsze analityczne?	Rozwiązany. Odpowiedź twierdząca. Dowód podany przez Ennio de Giorgiego oraz niezależnie, z wykorzystaniem innego aparatu, przez Johna Forbesa Nasha.
20	Czy wszystkie zadania rachunku wariacyjnego z określonymi warunkami brzegowymi mają rozwiązania?	Rozwiązany. Obszar intensywnych i szeroko zakrojonych badań w XX w.; wieloletnie wysiłki zwieńczone w 1998 r. skonstruowaniem dowodu dla przypadku nieliniowego.
21	Dowód istnienia liniowych równań różniczkowych z przypisanymi grupami monodromii	Rozwiązany w 1957 r. przez Helmuta Rörla. Odpowiedź twierdząca lub przecząca, w zależności od bardziej szczegółowego sformułowania problemu.
22	Uniformizacja relacji analitycznych przy pomocy funkcji automorficznych	Rozwiązany w 1907 r. przez Henriego Poincarégo.
23	Dalszy rozwój rachunku wariacyjnego	Rozwiązany.

HIPOTEZA GOLDBACHA

- Pruski matematyk Christian Goldbach w 1742 roku napisał list do przyjaciela, słynnego Leonarda Eulera. W liście tym zawarł wysnutą przez siebie hipotezę. Euler po przeczytaniu listu nieco ją uprościł i ostatecznie brzmi ona tak: „każda liczba naturalna parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych”.

  Faktycznie. 6 można przedstawić jako 3+3, a 8 można przedstawić jako 5+3… i tak dalej... Dzięki komputerom udało się pokazać, że hipoteza Goldbacha jest prawdziwa dla liczb naturalnych mniejszych niż 4×10^{17}. Wiadomo jednak, że liczb naturalnych jest nieskończenie wiele. Nie możemy z góry założyć, że hipoteza będzie prawdziwa dla liczby milion razy większej. Dlatego trzeba ją udowodnić, aby można było swobodnie używać jej w matematyce - bez obaw, że nie sprawdzi się dla 4×10^{89182}. Tysiące matematyków próbowało udowodnić lub obalić hipotezę Goldbacha. Wszystko jednak na próżno – problem do dziś pozostaje nierozstrzygnięty. Poczyniono jednak pewne kroki w tej sprawie.

- Udowodniono mianowicie, że każda parzysta liczba naturalna większa niż 2 może zostać przedstawiona jako suma najwyżej sześciu liczb pierwszych. W 1966 roku Chen, chiński matematyk, wykazał, że każda parzysta liczba naturalna większa niż 2 może zostać przedstawiona jako suma liczby pierwszej oraz liczby, która ma najwyżej dwa czynniki pierwsze. Z bezsilności spowodowanej udowadnianiem hipotezy Goldbacha powstała słaba hipoteza Goldbacha. Głosi ona, że każdą liczbę nieparzystą większą od 7 można wyrazić jako sumę trzech nieparzystych liczb pierwszych. Wiadomo, że ta hipoteza jest prawdziwa dla liczb większych od 10^{1346}, co zostało udowodnione w 2002 roku.

Apostolos Dioxadis napisał książkę o człowieku, który całe swoje życie poświęcił tej zagadce. Książka nosi nazwę „Zabójcza hipoteza”. Główny bohater, matematyk, umiera dopiero w momencie, w którym udowodnił prawdziwość hipotezy Goldbacha. Umierający dzwoni do swojego bratanka i prosi go o przyjechanie z jakimś matematykiem, aby przed śmiercią przekazać dowód hipotezy w obecności świadków. Bratanek jednak nie dojeżdża na czas. Podobno historia oparta jest na faktach. Na kogoś, kto obali lub potwierdzi hipotezę, czeka nagroda w wysokości miliona dolarów. Istnieje również szansa, że nie da się jej w ogóle udowodnić. A mówi o tym… "twierdzenie o niezupełności". Autorem twierdzenia, które wstrząsnęło światem matematycznym, jest Kurt Gödel. Twierdzenie to mówi, że w każdym systemie aksjomatycznym występują twierdzenia, które są prawdziwe, ale których nie można udowodnić. Przez to twierdzenie właśnie pojawiły się przypuszczenia, że hipotezy Goldbacha nie da się potwierdzić, mimo jej prawdziwości

- Wcześniej sądzono, że matematyka jest nauką zupełną. Dzięki temu twierdzeniu wiemy jednak, że nie da się tak zaprogramować komputera, by rozwiązał on wszystkie problemy matematyczne.

RÓWNANIE DIOFANTYCZNE

- Równanie, którego rozwiązania szuka się w zbiorze liczb całkowitych lub liczb naturalnych. Zwykle rozważa się równania diofantyczne o dwóch lub więcej niewiadomych – równania z jedną niewiadomą dają się rozwiązać metodami algebraicznymi.
- Przykłady równań diofantycznych:

  - równanie $x^n + y^n = z^n$ dla n=2: równanie to obrazuje zależność między długościami boków w trójkącie prostokątnym. Dla n›2 równanie to nie ma rozwiązań – jest to treść wielkiego twierdzenia Fermata.

- Dziękujemy za uwagę ☺
- Życzymy zdobycia miliona ;)